Comment mesurer la hauteur d’un arbre

Nous allons voir ici comment mesurer la hauteur d’un arbre, d’un bâtiment, d’un pylône, bref de tout ce qui est très haut et inaccessible au mètre à ruban.

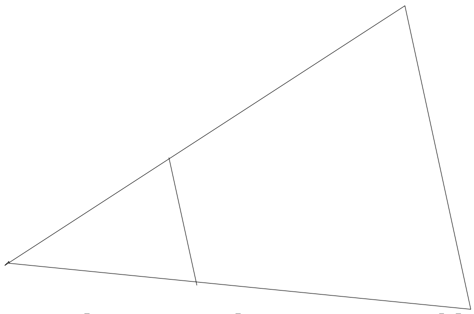
A - Quelques rappels de mathématiques

A.I - Les triangles semblables

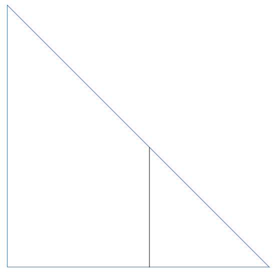
Pour bien comprendre, il faut avoir quelques bases en mathématiques (niveau collège) que je vais rappeler brièvement. Mais que les non-matheux se rassurent, on peut appliquer la méthode sans en comprendre les calculs.

Deux triangles sont dits semblables s’ils se ressemblent c’est-à-dire si l’un est la copie conforme de l’autre à une autre échelle. Les côtés correspondants sont tous dans le même rapport. De plus, leur 3 angles sont égaux. De ce fait, les triangles rectangles isocèles sont tous semblables.

Deux triangles sont semblables quand ils ont un angle commun et que leurs troisièmes cotés sont parallèles entre eux.



Ces triangles sont quelconques et semblables



Ces triangles sont rectangles isocèles donc semblables.

A.II - Les bonnes approximations

Pour les petits angles (exprimés en radians), on peut écrire $\sin(a) \simeq \mathrm{tg}(a) \simeq a$. On a aussi $\cos(a) \simeq 1$. Par exemple, pour $a = 0{,}1$rd, l’approximation est de 0,17 % sur le sinus, 0,03 % sur la tangente et le cosinus vaut 0,995.

B - La méthode de mesure la plus juste

Pour mesurer une hauteur, un décamètre et une simple équerre suffisent. L’équerre devra être aussi grande que possible et ses côtés devront être égaux. Une telle équerre peut être improvisée en assemblant deux planches à angle à peu près droit. On place vers les extrémités 3 clous déterminant un triangle rectangle isocèle. L’hypoténuse doit avoir une longueur égale à 1,41 fois celle des deux autres côtés.

La procédure est représentée sur la figure ci-dessous. On repère sur l’objet (ici une tour) un point (A) à la hauteur des yeux. Avec l’équerre on vise le point A d’une part et sans bouger, le sommet (S) d’autre part depuis différents points plus ou moins éloignés de la tour. On est trop près si S, est au-dessus de l’alignement et trop loin s’il est en dessous. Quand on est à la bonne distance, il suffit de mesurer cette distance OA et d’ajouter la hauteur de l’œil AB pour connaître la hauteur de la tour. En effet, à ce moment, le triangle OAS est rectangle isocèle donc AS = AO.

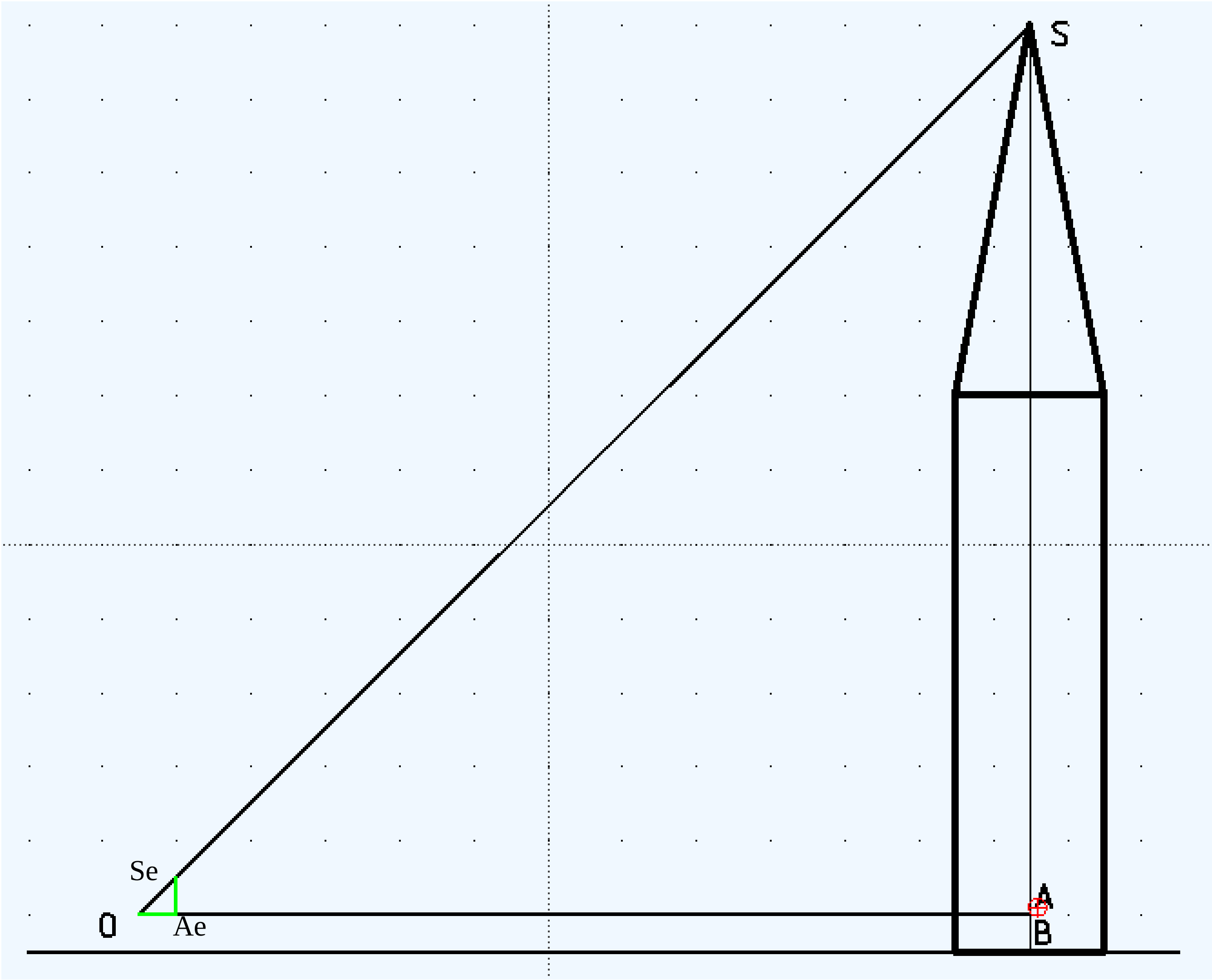


figure 1: La distance OA est correcte lorsque O, Se et S d'une part et O, Ae et A d'autre part sont alignés

C - Méthode approximative

Une solution plus rapide consiste à incliner l’équerre de façon à viser directement le pied de la tour (B). Ainsi procèdent les forestiers, non pas pour mesurer la hauteur d’un arbre mais pour savoir où tombera sa cime à l’abattage. La méthode introduit une certaine erreur, tout à fait acceptable lorsque la tour est très haute, mais que je vous propose d’évaluer.

D - Évaluation de l’erreur

La figure 2 permet de calculer l’erreur sur la hauteur. Les plus matheux suivront les calculs, les autres pourront sauter à la conclusion assez surprenante.

J’appelle Ht notre hauteur (SA sur la figure 2) ; et a l’angle dont il faut incliner l’équerre pour viser le point A. C’est aussi l’angle OAH et ASD.

SD est perpendiculaire à OA, de sorte que le triangle SOD est rectangle isocèle puisqu’il a un angle de 45°.

On a $SD = Ht \cdot \cos(a) = OD$

et $$DA = Ht . \sin(a)$$
donc $$OA = OD + DA = Ht (\cos(a) + \sin(a))$$

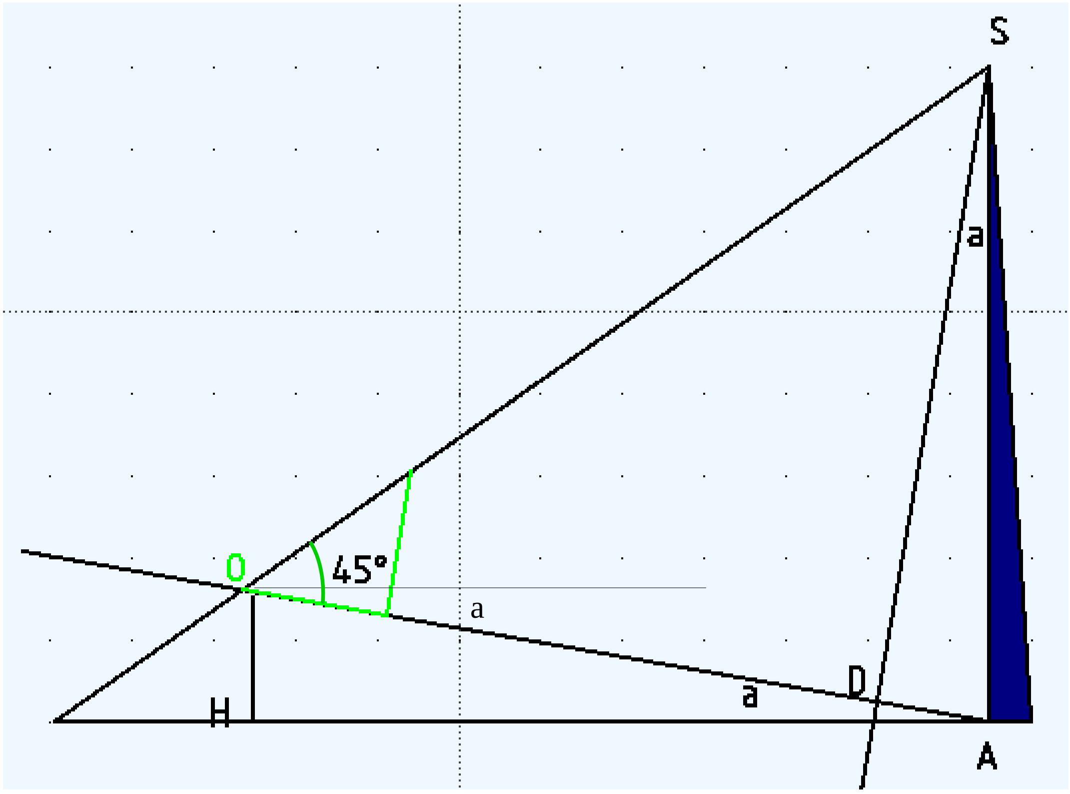


figure 2: L'erreur introduite en inclinant l'équerre est négligeable si OH << SA

Et enfin $$AH = OA . \cos (a)$$
Ce qui nous donne $$AH = Ht (\cos(a) + \sin(a)) . \cos(a).$$
Comme a est petit, on peut écrire sans trop tricher (voir plus haut):

$$a = tg(a) = OH / AH$$

et $$AH = Ht (1+ a)$$

Prenons un exemple concret :

L’observateur a les yeux à 1,5 m du sol et AH = 15 m. Dans ces conditions, a = 0,1 et AH représente 1,1 fois Ht, donc Ht = 15 m / 1,1 = 13,63 m et HA – Ht = 1,36 m. Ceci présente un écart de 14 cm par rapport à la hauteur des yeux.

Refaisons les mêmes calculs dans le cas de la tour Eiffel. On a AH = 300m, a = 1,5 / 300 = 0,005 donc Ht = HA . 1,005 = 301,5m

Conclusion : **Quelle que soit la hauteur à mesurer celle-ci est surévaluée sensiblement de la hauteur des yeux de l’observateur.**

E - Cas où l’objet est inaccessible

Il peut se trouver qu’un obstacle comme un fossé ou une interdiction de pénétrer empêche de mesurer la distance OA. Dans ce cas, rien n’est perdu, on peut procéder autrement mais toujours par visées.

La figure 3, montre la procédure. On fait deux visées. La première exactement comme vu plus haut, nous donne une distance D1 (qu’on ne peut pas mesurer). La deuxième utilise une équerre dont la branche verticale est 2 fois plus courte que l’autre. Si on a pris la solution des 2 planches et des 3 clous, il suffira de placer un 4^{e} clou. La visée nous donne une distance D2 ; Cette distance n’est pas plus mesurable que la première, mais l’écart entre les 2 l’est.

Les triangles semblables nous indiquent que D1 est égal à Ht (la hauteur) et que D2 = 2 Ht. La hauteur est donc égale à la distance D, entre les positions O1 et O2.

En fait, la méthode peut être généralisée pour s’adapter aux circonstances. En jouant sur les longueurs des bras de l’équerre on peut choisir l’intervalle des points O1 et O2.

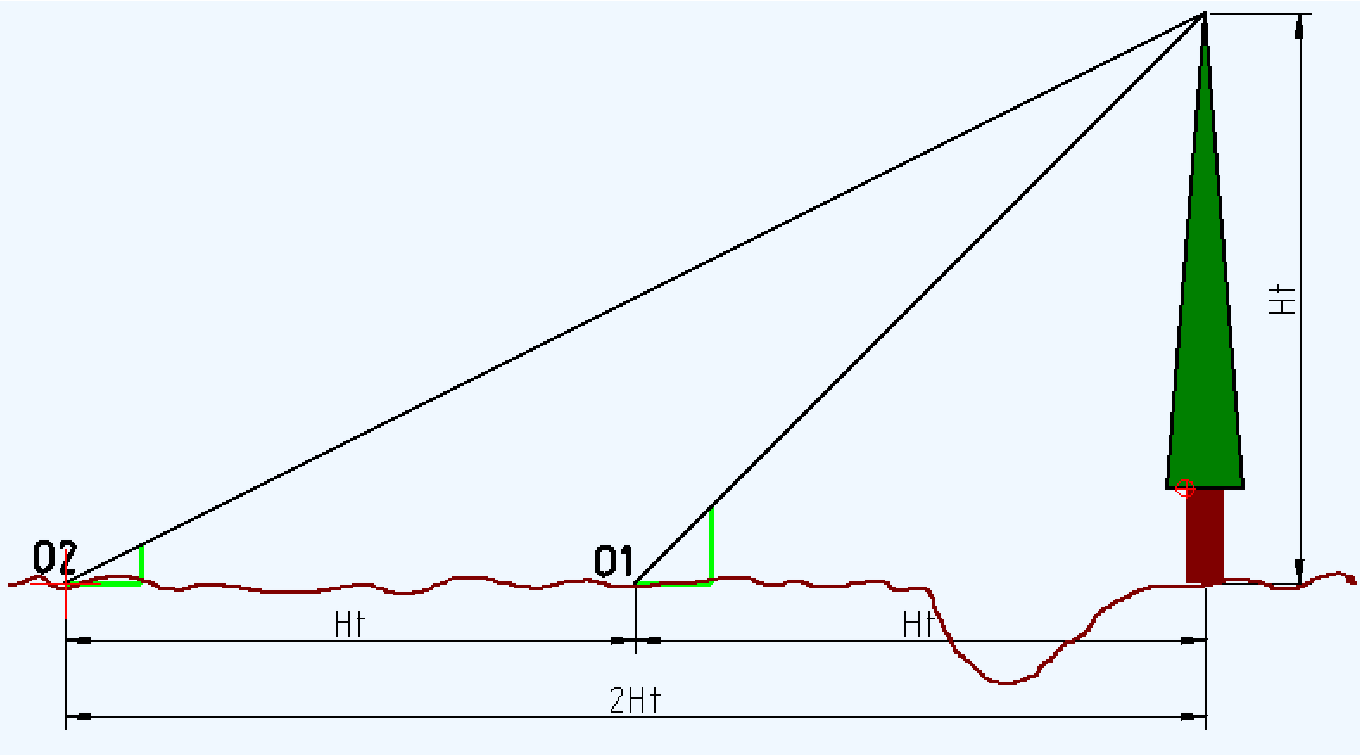


figure 3: Mesure en deux visées. La hauteur de mesure de O1 à O2.

Rien n’empêche de fonctionner à l’envers : On choisit une première position et on note la hauteur h1 de la branche verticale de l’équerre donnée par la visée. On agit de même au point O2 qui nous donne h2. Ensuite on fait les calculs.

Voici la formule : $Ht = D. L / (h1 – h2)$

L est la longueur de la branche horizontale de l’équerre. L, h1 et h2 doivent être exprimées dans la même unité (par exemple en mm) et Ht et D doivent être exprimées dans la même unité (par exemple en m).

Attention tout de même à la précision. Si L / (h1 – h2) ≫ 1, elle va s’écrouler !

F - Cas où le terrain est en pente

Dans tout ce qui précède, on a supposé que le terrain était horizontal. On a également vu qu’en inclinant légèrement l’équerre, l’erreur était faible et de l’ordre de grandeur du degré d’inclinaison. Pour les pentes inférieures à 10 % on aura donc pas trop de soucis.

Voici une solution générale qui marche à tous les coups.

On utilise le rapporteur d’étoiles que je décris dans mon article « pointage aux coordonnées avec un Dobson » en visant avec le bord supérieur de la planche graduée. La figure 4, montre le procédé dans le cas d’un terrain montant.

On mesure les angles a et b et la distance OA.

On a $OH = OA \cos(a)$,

et $AH = OA \sin(a)$,

et encore $SH = OH \, tg(b)$,

et enfin $AS = SH - AH$

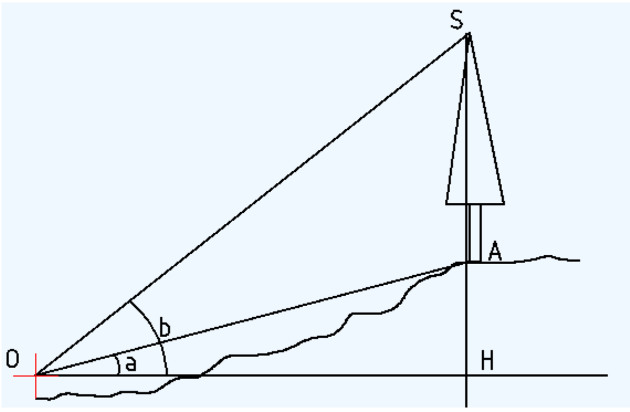


figure 4 a: Le terrain monte

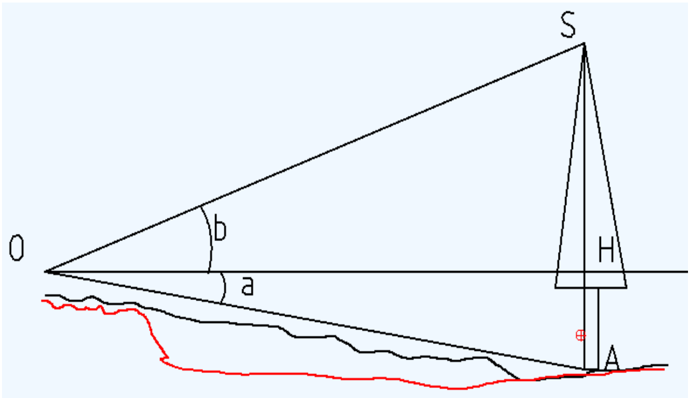


figure 4 b: Le terrain descend. En rouge un profil rendant la mesure de OA difficile.

Les calculs sont sensiblement les mêmes dans le cas d’un terrain descendant. Je vous laisse vous débrouiller. La mesure de l’angle a pose un petit problème : Mon rapporteur d’étoiles ne fonctionne que « vers le haut ». Il suffira de le retourner. On vise depuis la face opposée.

Il reste le cas évoqué par le trait rouge. Ici le terrain est tellement chaotique que la mesure de OA pose problème. On pourra s’en sortir une fois encore avec des visées et des triangles semblables. La figure 5, est une vue de dessus. Le gros cercle est l’objet à évaluer, le rectangle devant, est un objet quelconque de longueur connue (une règle, une perche, une voiture) et assez importante. L’objet en forme de T près du point de visée est constitué de 2 planchettes. La plus petite est déplacée sur l’autre (aussi grande que possible) jusqu’à ce que les points P1 et P2 (matérialisés par des clous) soient alignés respectivement sur R1 et R2.

Les triangles semblables nous disent que d / r = D / R

dont on déduit D = d . R / r

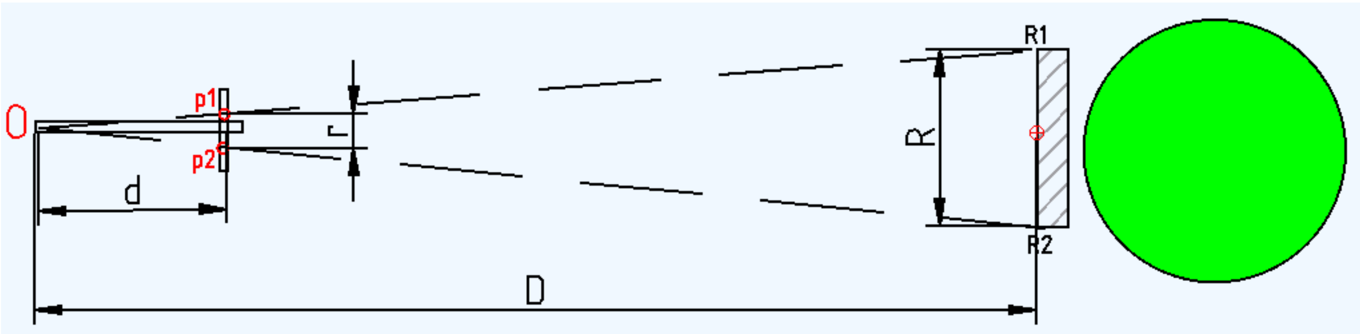


Table des matières